# 带非局部积分项常微分方程的讨论及其应用

朱一峰 [1]， 边保军 [2]

(1. 美国埃默里大学经济系, 亚特兰大 30322; 2. 同济大学应用数学系, 上海 200092)

**摘要：** 研究带非局部积分项的二阶线性常微分方程及其在金融保险上的应用. 首先讨论带非局部积分项的二阶常微分方程解的存在唯一性, 通过变量代换和累次积分交换积分顺序将非局部项简化, 将方程化为方程组, 然后完成了对方程组解的存在唯一性的证明. 接着分析了带非局部项的二阶常微分方程解的结构, 给出了方程解的形式. 最后通过推导, 指出带非局部项的线性常微分方程在保险公司的破产概率研究中的应用, 重点放在二阶方程的应用上, 并且在某一特定情况下, 举出了一个可以给出解析解的例子.

**关键词：** 非局部积分项; 二阶常微分方程; 破产概率

**中图分类号：** O175.1　**文献标识码：** A　**文章编号：** 1008-5513(2012)02-0219-09

## 1 引言

1997 年 4 月 25 日, 日本互助生命保险公司宣告破产, 结束了“日本保险公司不倒的神话”时期, 接下来东邦生命, 第百生命, 第一火灾海上等保险公司也相继倒闭, 进一步影响了人们对保险公司的信任度. 美国也从 1989 年“黑色星期一”起, 保险公司破产数量明显增加. 受 2008 年全球金融风暴的影响, 使中国正在发展的保险业受到了怀疑. 怎样有效地降低保险公司破产概率, 继而保证保户的利益成了人们更加关心的话题. 相关的研究从文献 [1] 开始, 近期的研究则集中于基本模型下增加考虑因素及提供一些解析解, 文献 [2-3] 即考虑了税负因素.

本文就是要研究破产概率所涉及到带非局部积分项的常微分方程. 如果考虑风险投资, 破产概率所满足的微分积分方程就是二阶方程, 如果不考虑, 所满足的方程就是一阶的. 最后在特定情况下, 给出方程的解. 说明哪些因素可以影响保险公司的破产概率, 这同时也说明这类方程有着非常广泛的应用背景.

## 2 带非局部积分项的二阶常微分方程初值问题解的存在唯一性

本文主要讨论带非局部积分项的二阶常微分方程, 先给出方程的一般形式:

$$\begin{cases} y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)+\lambda(x)\displaystyle\int_0^x y(x-t)m(t)\mathrm{d}t=f(x), \\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2011-08-26.

作者简介：朱一峰 (1983-), 博士生, 研究方向: 偏微分方程, 金融经济学.

其中 $p(x)$, $q(x)$, $\lambda(x)$ 是非常系数.

考虑定解问题 (1) 解的存在唯一性. 令 $y'(x)=z(x)$, 得到

$$\begin{cases} y'(x)=z(x), \\ z'(x)=-p(x)z(x)-q(x)y(x)-\lambda(x)\displaystyle\int_0^x y(x-t)m(t)\mathrm{d}t+f\,(x)\,. \end{cases} \tag{2}$$

(2) 式两边积分, 得

$$z(x)=-\int_0^x \big[p(u)z(u)+q(u)y(u)-f(u)\big]\mathrm{d}u-\int_0^x \lambda(u)\bigg[\int_0^u y(u-t)m(t)\mathrm{d}t\bigg]\mathrm{d}u+c.$$

至于 $c$, 由 $z(0)$ 决定, $c=z(0)=y_1$, 所以

$$\int_0^u y(u-t)m(t)\mathrm{d}t=\int_0^u y(w)m(u-w)\mathrm{d}w=\int_0^u y(t)m(u-t)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

$$\int_0^x \lambda(u)\bigg[\int_0^u y(u-t)m(t)\mathrm{d}t\bigg]\mathrm{d}u=\int_0^x \lambda(u)\bigg[\int_0^u y(t)m(u-t)\mathrm{d}t\bigg]\mathrm{d}u. \tag{4}$$

累次积分交换积分次序, (4) 式变为

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t\int_t^x \lambda(u)m(u-t)\mathrm{d}u=\int_0^x y(u)\mathrm{d}u\int_u^x \lambda(t)m(t-u)\mathrm{d}t.$$

令

$$\int_u^x \lambda(t)m(t-u)\mathrm{d}t=M(x,u),$$

在 $0\le x\le b$ 上讨论, 以下结论可推广到 $a\le x\le b$, $a\le 0$. 令

$$\boldsymbol{Y}(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}(0)=\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}=\boldsymbol{\eta}.$$

上面的方程组 (2) 化为:

$$\boldsymbol{Y}'(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}(x)-\lambda(x)\int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m(x-t) & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t+\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

两边积分得

$$\boldsymbol{Y}(x)=\boldsymbol{\eta}+\int_0^x \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}(x)+\begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}\right]\mathrm{d}u-\int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M(x,u) & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}(u)\mathrm{d}u.$$

令

$$\boldsymbol{A}(x,u)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(u)-M(x,u) & -p(u) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(u)=\begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix},$$

在 $0 \le u \le x$, $0 \le x \le b$ 上连续, 所以

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{\eta} + \int_0^x [\boldsymbol{A}(x,u)\boldsymbol{Y}(u) + \boldsymbol{F}(u)]\mathrm{d}u. \tag{6}$$

类似于文献 [4] 命题的证明, 可以得到方程组解的存在唯一性.

如果

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ 是 $2\times 2$ 矩阵, $\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ 是二维向量, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m(x-t) & 0 \end{pmatrix}$ 是 $2\times 2$ 矩阵,

$\lambda(x)$ 是 $x$ 的函数. 它们都在 $0 \le x \le b$, $0 \le t \le x$ 上连续, 则对于区间 $a \le x \le b$ 上的数 0 及任一常数向量 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1 \ \ \eta_2)^{\mathrm{T}}$, 方程组

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}(x) - \lambda(x)\int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m(x-t) & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

存在唯一解 $\boldsymbol{\phi}(x)$, 定义在整个区间 $0 \le x \le b$ 上, 且满足初始条件, $\boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\eta}$.

## 3 带非局部项的二阶常微分方程解空间的结构

再考虑解的结构, 由 (5) 式. 令

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m(x-t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y} + \lambda(x)\int_0^x \boldsymbol{B}(x,t)\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{F}(x), \tag{7}$$

对应的齐次方程为

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y} - \lambda(x)\int_0^x \boldsymbol{B}(x,t)\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t. \tag{8}$$

(8) 式的解满足叠加原理.

不加证明地给出下面几个定理.

**定理 3.1**　如果向量函数 $\boldsymbol{Y}_1(x)$, $\boldsymbol{Y}_2(x)$ 在区间 $a \le x \le b$ 上线性相关, 则它们的伏朗斯基行列式 $\boldsymbol{W}(x) = 0$, $a \le x \le b$.

**定理 3.2**　如果 (8) 式的解 $\boldsymbol{Y}_1(x)$, $\boldsymbol{Y}_2(x)$ 线性无关, 那么它们的伏朗斯基行列式

$$\boldsymbol{W}(x) \ne 0, \quad a \le x \le b.$$

**定理 3.3**　(8) 式一定存在两个线性无关的解 $\boldsymbol{Y}_1(x)$, $\boldsymbol{Y}_2(x)$.

**定理 3.4**　如果 $\boldsymbol{Y}_1(x)$, $\boldsymbol{Y}_2(x)$ 是 (8) 式的两个线性无关的解, 则 (8) 式的任何一解 $\boldsymbol{Y}(x)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{Y}(x) = c_1\boldsymbol{Y}_1(x) + c_2\boldsymbol{Y}_2(x),$$

这里 $c_1$, $c_2$ 是相应的确定常数.

所以, 可知 (8) 式的线性无关解最大个数等于 2, (8) 式的所有解的集合构成一个 2 维线性空间.

定理 3.3, 定理 3.4 可以表述为:

**定理 3.5** (8) 式一定存在一个基解矩阵 $\boldsymbol{\phi}(x)$, 如果 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 是 (8) 式的任一解, 那么

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{C},$$

这里 $\boldsymbol{C}$ 是确定的常数列向量.

(8) 式的两个简单性质:

**性质 3.1** 如果 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 是 (7) 式的解, $\boldsymbol{\phi}(x)$ 是 (7) 式的对应的齐次方程组 (8) 式的解, 则 $\boldsymbol{\psi}(x)+\boldsymbol{\phi}(x)$ 是 (7) 式的解;

**性质 3.2** 如果 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(x)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(x)$ 是 (7) 式的两个解, 则 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(x)-\tilde{\boldsymbol{\phi}}(x)$ 是 (8) 式的解.

由性质 2.2 和定理 2.5, 可得如果 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 是 (8) 式的基解矩阵, $\bar{\boldsymbol{\phi}}(x)$ 是 (7) 式的某一解, 则 (7) 式的任何一解 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 都可表为

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{C}+\bar{\boldsymbol{\phi}}(x),$$

这里 $\boldsymbol{C}$ 是确定的常数列向量.

## 4 在保险公司破产概率计算中的应用

带非局部积分项的常微分方程在金融方面有着广泛的应用, 尤其是在计算保险公司破产概率时. 设 $u>0$ 是保险公司初始准备金, 保费收入按照固定比例 $c>0$ 随时间线性增长, 即 $[0,t]$ 期间保费收入为 $ct$, 用 $S(t)$ 表示理赔额, $W_t$ 代表 $t$ 时刻保险公司用以投资所得的不确定收入, 则保险公司在时刻 $t$ 时的盈余 $R_t$, 可以用下式简单表示出来:

$$R_t=u+ct+\sigma W_t-S_t,\quad t\geq 0. \tag{9}$$

在 (9) 式中, 理赔 $\{S(t)\}$ 是依赖于时间的随机变量, 即随机过程. 理赔过程 $\{S(t)\}$ 由理赔次数 (过程)$\{N(t)\}$ 与每一次个别理赔额 $\{Z_k,k=1,2,\cdots,N_t\}$ 复合而成. 若是理赔次数 $N$ 服从泊松分布, 则称聚合理赔量 $S$ 服从复合泊松分布. (9) 式中 $\sigma>0$ 表示原生资产的波动率常量, $\{W_t\}$ 标准布朗运动.

下面在经典风险模型下讨论问题:

$$R_t=u+ct+\sigma W_t-\sum_{k=1}^{N_t}Z_k,\quad t\geq 0, \tag{10}$$

其中 $\{N_t\}$ 是参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程, 在时间段 $(0,t)$ 上记录下了理赔的次数; $\{Z_k\}$, $k\geq 1$ 是相互独立的非负的随机变量序列, $Z_k$ 表示第 $k$ 次理赔额. $\{N_t\}$, $\{Z_k\}$, $\{W_t\}$ 相互独立. (10) 式过程是连续时间的齐次强马尔可夫过程.

从 (10) 式中可以看出有两种可能性会导致保险公司的破产. 一是由理赔所引发的破产, 一是由于公司的投资不当所造成的破产. 所以, 文献 [5] 将 (10) 式的风险过程的破产概率分解成

两个部分: 由投资不当所造成破产的概率和由于理赔所造成破产的概率. 假设破产概率是二阶可微的, 他们得到了以级数明确表示的两种不同的破产概率.

令 $a>0$, 定义 $\tau_a=\inf\{s:|W_s|=a\}$. 当 $x\in[-a,a]$, 定义两个函数:

$$H(a,t,x)=(2\pi t)^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[\exp\Big\{-\frac{1}{2t}(x+4ka)^2\Big\}-\exp\Big\{-\frac{1}{2t}(x-2a+4ka)^2\Big\}\Big], \tag{11}$$

$$\begin{aligned}h(a,t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}at^{-3/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[&(4k+1)\exp\Big\{-\frac{a^2}{2t}(4k+1)^2\Big\}+\\&(4k-3)\exp\Big\{-\frac{a^2}{2t}(4k-3)^2\Big\}-(4k-1)\exp\Big\{-\frac{a^2}{2t}(4k-1)^2\Big\}\Big].\end{aligned} \tag{12}$$

从文献 [6] 中可以知道:

$$P(W_s\in \mathrm{d}x,\tau_a>s)=H(a,s,x)\mathrm{d}x,\qquad P(\tau_a\in \mathrm{d}s)=h(a,s)\mathrm{d}s.$$

定义 $T_u^0=\inf\{t\geq 0;R_t<0\}$, 如果任意 $t\geq 0$, $R_t\geq 0$, 则 $T_u^0=+\infty$, 明显可以看出 $T_u^0$ 是破产时刻. 定义风险过程 (10) 式的破产概率 $\psi(u)$, $\psi(u)=P(\inf_{t\geq 0}R_t<0)$, 得到 $\psi(u)=P(T_u<+\infty)$. 令 $\mu=E[Z_1]$, $F(z)=P(Z_1\leq z)$.

因为

$$\mu_s(t)=ES(t)=E(E(S(t)|N(t)))=E(N(t)E(Z_1))=EN(t)E(Z_1)=\lambda_t E(Z_1),$$

所以当 $\mu>0$ 时, 假设 $E[R_t]=u+(c-\lambda\mu)t>0$, 即假设 $c-\lambda\mu>0$, 那样的话, $\psi(u)<1$. 而当 $c-\lambda\mu<0$ 时, 会有

$$\lim_{x\to\infty}E[R_t]=-\infty,$$

破产是必然事件, 即 $\psi(u)=1$; 同样当 $c-\lambda\mu=0$ 时, 也可以证明破产必然会发生.

用 $\psi_d(u)$ 表示因投资不当所造成破产的概率, 用 $\psi_s(u)$ 表示因理赔所引起破产的概率:

$$\psi(u)=\psi_d(u)+\psi_s(u). \tag{13}$$

定义 $\{T_k\},k\geq 1$, 即是 $\{N_t\}$ 的跳时间序列, 即理赔时间序列. 如果 $F(z)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续的密度函数, 则

$$P\big(\cup_{k=1}^{\infty}\{R_{T_k}=0\}\big)=0,$$

所以

$$\psi_d(u)=P(T_u^0<+\infty,R_{T_u^0}=0),\quad \psi_s(u)=P(T_u^0<+\infty,R_{T_u^0}=0). \tag{14}$$

从 (14) 式可以看出

$$\psi_d(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ 1, & u=0,\end{cases}\qquad \psi_s(u)=\begin{cases}1, & u<0,\\ 0, & u=0.\end{cases} \tag{15}$$

**定理 4.1** $u>0$, 假设 $F(Z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 那么概率 $\psi_d(u)$ 满足下面的积分方程:

$$\psi_d(u)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\big(\psi_d(ct)+\psi_d(2u+ct)\big)\exp\{-\lambda t\}h\Big(\frac{u}{\sigma},t\Big)\mathrm{d}t+ \int_0^{+\infty}\lambda\exp\{-\lambda s\}\mathrm{d}s\int_{-u/\sigma}^{u/\sigma}H\Big(\frac{u}{\sigma},s,x\Big)\mathrm{d}x\int_0^{u+cs+\sigma x}\psi_d(u+cs+\sigma x-z)\mathrm{d}F(z). \quad (16)$$

**证明** 用 $A_d$ 表示因投资不当所造成的破产事件. $F_t=\sigma\{R_s,s\le t\}$, $\sigma(R_s,s\le t\}$ 表示在 $s$ 时刻, 盈余 $R_s$ 所有可能发生的信息. 定义 $M_t=E\big[I(A_d)|F_t\big]$, 所以 $\{M_t,t\ge 0\}$ 是一个 $F_t$- 鞅. 定义 $T=\tau_{u/\sigma}\Lambda T_1$, $\Lambda$ 表示取一个小值, 得到

$$P(T<+\infty)\le P(T_1<+\infty)=1.$$

由最优停止定理和强马尔可夫过程 $R_t$ 的性质, 得到

$$\psi_d(u)=EM_0=E[M_T]=E\big[E\big[I(A_d)|F_T\big]\big]=E\big[\psi_d(R_T)\big]. \quad (17)$$

所以

$$\begin{aligned}\psi_d(u)=&\ E\big[\psi_d(R_T)\big]=E\big[\psi_d(u+c\tau_{u/\sigma}+\sigma W_{\tau_{u/\sigma}})I(\tau_{u/\sigma}<T_1)\big]+\\ &E\big[\psi_d(u+cT_1+\sigma W_{T_1}-Z_1)I(\tau_{u/\sigma}\ge T_1)\big]=I_1+I_2.\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}I_1&=E\big[\psi_d(u+c\tau_{u/\sigma}+\sigma W_{\tau_{u/\sigma}})I(\tau_{u/\sigma}<T_1)\big]\\ &=\frac{1}{2}E\big[\psi_d(2u+c\tau_{u/\sigma})+\psi_d(c\tau_{u/\sigma})I(\tau_{u/\sigma}<T_1)\big].\end{aligned} \quad (19)$$

由文献 [7] 的命题 2.8.3 可得:

$$P(W_{\tau_a}=a,\tau_a\in\mathrm{d}t)=P(W_{\tau_a}=-a,\tau_a\in\mathrm{d}t)=\frac{1}{2}h(a,t)\mathrm{d}t.$$

由 (19) 式得:

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\psi_d(ct)+\psi_d(2u+ct)\exp\{-\lambda t\}h\Big(\frac{u}{\sigma},t\Big)\mathrm{d}t, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}I_2&=E\big[\psi_d(u+cT_1+\sigma W_{T_1}-Z_1)I(\tau_{u/\sigma}\ge T_1)\big]\\ &=\int_0^{+\infty}\lambda\exp\{-\lambda s\}\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}\mathrm{d}F(z)\int_{-u/\sigma}^{u/\sigma}\psi_d(u+cs+\sigma x-z)H\Big(\frac{u}{\sigma},s,x\Big)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{+\infty}\lambda\exp\{-\lambda s\}\mathrm{d}s\int_{-u/\sigma}^{u/\sigma}H\Big(\frac{u}{\sigma},s,x\Big)\mathrm{d}x\int_0^{u+cs+\sigma x}\psi_d(u+cs+\sigma x-z)\mathrm{d}F(z).\end{aligned} \quad (21)$$

类似文献 [8] 中定理 2.2 和定理 2.3 的证明, 得到下面两个定理:

**定理 4.2** 如果 $F(z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 则 $\psi_d(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上二阶连续可微.

**定理 4.3** 假设 $F(z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 则 $\psi_d(u)$ 满足积分微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi_d''(u)+c\psi_d'(u)=\lambda\psi_d(u)-\lambda\int_0^u\psi_d(u-z)\mathrm{d}F(z),\quad u\in(0,\infty). \quad (22)$$

类似于定理 4.2 和定理 4.3, 得到下面的定理:

**定理 4.4**　假设 $F(z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 则 $\psi_s(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上二阶连续可微.

**定理 4.5**　假设 $F(z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 则 $\psi_s(u)$ 满足积分微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi_s''(u)+c\psi_s'(u)=\lambda\psi_s(u)-\lambda\int_0^u\psi_s(u-z)\mathrm{d}F(z)-\lambda(1-F(u)),\quad u\in(0,\infty). \tag{23}$$

**命题 4.1**　如果 $F(z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 则 $\psi_d(u)$ 在 $[0,+\infty]$ 上也是连续的.

**证明**　通过定理 4.1, 能够充分说明 $\psi_d(0^+)=\psi_d(0)$. 因为 $P(T_{0^+}^0=T_0^0=0)=1$(见文献 [8] 的引理 4.1), 且 $R_t$ 是右连续, 所以由一致收敛定理, 有

$$\begin{aligned}\lim_{u\to0}\psi_d(u)&=\lim_{u\to0}E\big[I(T_u^0<+\infty,R_{T_u^0}=0)\big]=E\big[\lim_{u\to0}I(T_u^0<+\infty,R_{T_u^0}=0)\big]\\&=E\big[I(T_0^0<+\infty,R_0=0)\big]=1=\psi_d(0).\end{aligned}$$

类似于命题 4.1, 有如下的命题:

**命题 4.2**　如果 $F(z)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有连续的密度函数, 则 $\psi_s(u)$ 在 $[0,+\infty]$ 上也是连续的.

将 (22) 和 (23) 式的左右两端分别相加, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2(\psi_d(u)+\psi_s(u))''+c(\psi_d(u)+\psi_s(u))'\\&=\lambda(\psi_d(u)+\psi_s(u))-\lambda\int_0^u(\psi_d(u-z)+\psi_s(u-z))\mathrm{d}F(z)-\lambda(1-F(u)),\end{aligned} \tag{24}$$

则

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi''(u)+c\psi'(u)=\lambda\psi(u)-\lambda\int_0^u\psi(u-z)\mathrm{d}F(z)-\lambda(1-F(u)). \tag{25}$$

若 $F(z)$ 是可微的, $F'(z)=f(z)$, 有

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi''(u)+c\psi'(u)-\lambda\psi(u)+\lambda\int_0^u\psi(u-z)f(z)\mathrm{d}z=\lambda(F(u)-1). \tag{26}$$

由于 $\sigma$ 为大于零的常数,

$$\psi''(u)+\frac{2c}{\sigma^2}\psi'(u)-\frac{2\lambda}{\sigma^2}\psi(u)+\frac{2\lambda}{\sigma^2}\int_0^u\psi(u-z)f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\lambda}{\sigma^2}(F(u)-1). \tag{27}$$

(27) 式就是所讨论的二阶带非局部积分项常微分方程形式.

如果将经典风险模型简化, 不考虑风险投资, 即

$$\sigma W_t=0,\quad R_t=u+ct-\sum_{k=1}^{N_t}Z_k,$$

那么终极破产概率 $\psi(u)$ 满足的方程为 [9]:

$$\psi'(u)-\frac{\lambda}{c}\psi(u)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-z)f(z)\mathrm{d}z=\frac{\lambda}{c}(F(u)-1),\quad u\in(0,\infty), \tag{28}$$

阶数低了一阶. 无论是一阶方程还是二阶方程想得到它们的解析解并不容易, 只有在一些特殊情况下才能获得.

以上求破产概率的方程 (27) 和 (28) 式都没有考虑利率因素, 若考虑了利率因素 [8], $I_t=rt$. 终极破产概率 $\psi(u)$ 满足的方程为:

$$\psi'(u)-\frac{r+\lambda}{c}\psi(u)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-z)f(z)\mathrm{d}z=\frac{\lambda}{c}(F(u)-1). \tag{29}$$

上文提到了只有在一些特殊情况下才能通过解析的方法求出破产概率 $\psi(u)$ 的值. 本文最后举出一个可以求出解析解的例子. 如果

$$F(z)=\begin{cases}1-\exp(-\alpha z), & z\geq 0,\\ 0, & z<0,\end{cases}\qquad(\alpha>0),$$

即服从参数为 $\alpha$ 的指数分布. 不考虑利率因素, 类似于文献 [8] 中所举例子及其分析, 由 (22) 和 (23) 式, 有

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi_d''(u)+c\psi_d'(u)=\lambda\psi_d(u)-\lambda\int_0^u\psi_d(u-z)\mathrm{d}F(z),\quad u>0, \tag{30}$$

$$\psi_d(0)=1,\qquad \psi_d(+\infty)=0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\psi_s''(u)+c\psi_s'(u)=\lambda\psi_s(u)-\lambda\int_0^u\psi_s(u-z)\mathrm{d}F(z)-\lambda(1-F(u)),\quad u>0, \tag{32}$$

$$\psi_s(0)=0,\qquad \psi_s(+\infty)=0. \tag{33}$$

那么由解的存在唯一性定理, (30) 和 (31) 式及 (32) 和 (33) 式的解存在且唯一.

$$\psi_d(u)=1+c_1\exp\{-\lambda_1u\}+c_2\exp\{-\lambda_2u\}, \tag{34}$$

$$\psi_s(u)=c_3\exp\{-\lambda_1u\}+c_4\exp\{-\lambda_2u\}. \tag{35}$$

$$\lambda_1=\frac{(\frac{1}{2}\alpha\sigma^2+c)-\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha\sigma^2+c)^2-2\sigma^2(\alpha c-\lambda)}}{\sigma^2},$$

$$\lambda_2=\frac{(\frac{1}{2}\alpha\sigma^2+c)+\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha\sigma^2+c)^2-2\sigma^2(\alpha c-\lambda)}}{\sigma^2}.$$

$$c_1=\frac{\sigma^2\lambda_2^2-2c\lambda_2-2\lambda}{\sigma^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)-2c(\lambda_2-\lambda_1)},\quad c_2=\frac{-\sigma^2\lambda_1^2+2c\lambda_1-2\lambda}{\sigma^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)-2c(\lambda_2-\lambda_1)},$$

$$c_3=\frac{2\lambda}{\sigma^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)-2c(\lambda_2-\lambda_1)},\quad c_4=\frac{-2\lambda}{\sigma^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)-2c(\lambda_2-\lambda_1)},$$

将 (34) 和 (35) 式相加, 就能得到所期望的破产概率的表达式:

$$\psi(u)=1+(c_1+c_3)\exp\{-\lambda_1u\}+(c_2+c_4)\exp\{-\lambda_2u\},$$

可以看出 $u,c$ 越大, $\psi(u)$ 越小.

说明增加保险公司的初始准备金, 或提高费率, 可以有效降低破产概率. 若考虑了利率因素, 因为所化成的方程中的系数不再全是常系数, 所以解答起来和上面的方法有所不同, 比较复杂, 不过仍然可以用显式表达破产概率, 本文不再累述.

**参考文献**

[1] Gerber H U. An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1970(3):205-210.

[2] Albrecher H, Borst S, Boxma O, et al. The tax identity in risk theory-a simple proof and an extension[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009,44:304-306.

[3] Wang W, Ming R, Hu Y. On the expected discounted penalty function for risk process with tax[J]. Statist. Probab. Lett., 2011,81:489-501.

[4] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1983.

[5] Dufresne F, Gerber H U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1991,10:51-59.

[6] Revuz D, Ypr M. Continuous Martingales and Brownian Motion[M]. Berlin: Springer, 1991.

[7] Port S, Stone C. Brownian Motion and Classical Potential Theory[M]. New York: Academic Press, 1978.

[8] Wang G, Wu R. Some distributions for classical risk process that is perturbed by diffusion[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000,26:15-24.

[9] Gerber H U, Shiu E. From Ruin Theory to Option Pricing[M]. Cairns: AFIR Colloquium, 1997.

# Discussion and application of ordinary differential equation with non-local integral term

Zhu Yifeng [1], Bian Baojun [2]

(1. Department of Economics, Emory University, Atlanta 30322, USA;

2. Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Second-order linear ordinary differential equation with non-local integral term inside are major discussed in this thesis. Firstly, we canvass the existence and uniqueness of the solution of the second-order ordinary integro-differential equation. By variable substitution and exchanging sequence of repeated integral, the non-local integral term can be simplified, the equation can be transformed into system of equations. Then, the proof of existence and uniqueness of the solution of equations are completed here. Second, we analyze the structure of the solution, also we give the solution form of the equation. At last, we point out the application of the ordinary integro-differential equation through deduction. It can be used in ruin probabilities′ of an insurance company. We focus our energies upon the application of the second-order equation. Furthermore, the explicit expressions for the integro-differential equations will be presented when the claims are exponentially distributed.

**Key words:** non-local integral term, second-order differential equation, ruin probability

**2010 MSC:** 91B30