2011,**31A**(1):1–17

数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

# 一类一维的辐射流体力学方程组激波的存在性 *

朱一峰　　蒋鹏

(上海交通大学数学系　　上海 200240)

**摘要**：该文主要讨论一维空间中一类辐射流体力学方程组的激波．由 Rankine-Hugoniot 条件及熵条件得此问题可表述为关于辐射流体力学方程组带自由边界的初边值问题．首先通过变量代换，将其自由边界转换为固定边界，然后研究关于此非线性方程组的一个初边值问题解的存在唯一性．为此先构造了此问题的一个近似解，然后分别通过 Picard 迭代与 Newton 迭代对此非线性问题构造近似解序列．通过一系列估计与紧性理论得到此近似解序列的收敛性，其极限即为原辐射热力学方程组的一个激波．

**关键词**：一维辐射流体力学方程组；激波；存在性．

**MR(2000) 主题分类**：78A40; 35L67; 74G20　　**中图分类号**：O29　　**文献标识码**：A

**文章编号**：1003-3998(2011)01-1-17

## 1　引言

在高温下，热辐射对流体的运动有很重要的影响，辐射场强烈地影响到流体动力学．辐射流体力学的应用很广，包括了不同的天体物理现象，象恒星大气和表面的波和振动，非线性星脉冲，超新星爆炸，星风等等．在其它领域也有直接的应用，象物理中的激光熔接和再进入飞行器 (航天器或火箭重返地球大气层的部分)．研究物理、力学中辐射现象的机制，辐射对流体物理量 (如能量、动量、温度等) 性质变化的制约作用等是非常重要的．辐射流体力学在科学研究、国民经济和国防建设中均有着广泛的应用．对辐射流体力学的物理建模与数值模拟的研究在国内外已开展多年，也已取得了一系列重要的成果 [14−15]．辐射流体力学数学理论的研究对于深刻理解模型的性质、设计好的数值格式具有重要的参考作用．在辐射流体力学中，当忽略粘性、热传导的影响，流体的密度、速度、能量和辐射强度、辐射能等可由反应质量守恒，动量守恒和能量守恒的欧拉方程组和玻耳兹曼输运方程的耦合组来描述．对于辐射流体力学的研究，不管从数学理论，还是从应用的观点看，都是很重要的．

收稿日期: 2008-08-30; 修订日期: 2009-12-06

E-mail: suxian2000@sina.com; syepmathjp@yahoo.com.cn

∗ 基金项目：国家自然科学基金 (10531020) 和国家联合基金 (10676020) 资助

若记 $I(x,t,\nu,\Omega)$ 为 $t$ 时刻， $x$ 处，频率为 $\nu$, 沿方向 $\Omega$ 传播的辐射场强度密度函数，则由文献 [14–15] 知，等熵的辐射流体力学方程组可表示为下述形式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial I(\nu,\Omega)}{\partial t}+\Omega_1\dfrac{\partial I(\nu,\Omega)}{\partial x}=S(\nu)-\sigma_a(\nu)I(\nu,\Omega)\\ +\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}\nu'\int_{S^2}\Big(\frac{\nu}{\nu'}\sigma_s(\nu'\to\nu,\Omega'\cdot\Omega)I(\nu',\Omega')-\sigma_s(\nu\to\nu',\Omega\cdot\Omega')I(\nu,\Omega)\Big)\,\mathrm{d}\Omega',\\ \rho_t+(\rho u)_x=0,\\ \Big(\rho u+\dfrac{1}{c^2}F_r\Big)_t+(\rho u^2+P+P_r)_x=0.\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $c$ 为光速， $S(\nu)$ 是辐射源产生的辐射强度， $\sigma_a(\nu)=\sigma_a(x,t,\nu,\rho)$ 为介质的辐射场强度被吸收的系数． $\sigma_s(\nu'\to\nu,\Omega'\cdot\Omega)$ 为由频率为 $\nu'$, 传播角度为 $\Omega'$ 的中子被散射为频率为 $\nu$, 角度为 $\Omega$ 的中子的散射系数． $\rho(t,x)$ 为密度， $u$ 为速度场． $P=P(\rho)$ 为压强，由下述表示的 $F_r$ 与 $P_r$ 分别为辐射流函数与辐射压强张量

$$\begin{cases}F_r=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}\nu\int_{S^2}\Omega_1 I(\nu,\Omega)\mathrm{d}\Omega,\\ P_r=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}\nu\int_{S^2}\Omega_1^2 I(\nu,\Omega)\mathrm{d}\Omega.\end{cases} \tag{1.2}$$

对一维拟线性双曲守恒律方程组间断解理论已有十分丰富的研究成果 [2,10−13,17]. 但对辐射流体力学方程组 (1.1)–(1.2), 由于其复杂性，相关的数学结果比较少．近来，钟新华和江松在文献 [19] 中得到了辐射流体力学非线性双曲方程和玻耳兹曼方程耦合组柯西问题光滑解的局部存在性、大初值问题解在有限时间的爆破现象． Rohde 和雍稳安在文献 [16] 中对一类简化的带非局部项的非线性平衡方程和辐射输运方程耦合组，建立了熵解的存在性和它的非相对论效应极限．在对辐射流体力学一定的简单化假设下， Kawashima 等人在文献 [6–7] 中用一个非线性双曲方程和椭圆方程的耦合组来描述一维的辐射流体的运动， Ito 在文献 [4] 中给出了它具有有界变差的弱解的存在性， Kawashima 等人在文献 [8–9] 中建立了其一些非线性波的稳定性．在文献 [1] 中， Anile, Blokhin 和 Trakhinin 研究了一类辐射流体方程组，通过对此方程组的对称化得到了其 Cauchy 问题局部光滑解的存在性．而对具有重要应用背景的辐射流体力学方程组间断解的理论研究，特别是波的奇性的传播，干扰等等至今还很缺乏．所以有必要对其进行理论研究．

本文下面是这样安排的：在第二章中先由 Rankine-Hugoniot 条件和 Lax 熵条件得出此问题可表述为关于辐射流体力学方程组带自由边界的初边值问题，利用变量代换，将其自由边界转换为固定边界，然后研究关于此非线性方程组的一个初边值问题解的存在唯一性；为此在第三章中先构造了此问题的一个近似解，然后通过分别对方程运用 Picard 迭代与对边界条件运用 Newton 迭代来对此非线性问题构造近似解序列，通过一系列估计与紧性理论得到此近似解序列的收敛性，进而得到辐射热力学方程组激波的局部存在性．

## 2 问题的提出及其主要结果

### 2.1 问题的提出

利用 (1.2) 式，我们可以将 (1.1) 式写成

$$U_t+A(U)\cdot U_x=B(U). \tag{2.1}$$

先令 $m=\rho u$, 有

$$U=\begin{pmatrix} I \\ \rho \\ m \end{pmatrix}, \quad A(U)=\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a^2-\dfrac{m^2}{\rho^2} & \dfrac{2m}{\rho} \end{pmatrix}, \quad B(U)=\begin{pmatrix} f \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

其中 $a=\sqrt{P'(\rho)}$ 为声速. 令

$$F(U)=\left(cI,m,\frac{m^2}{\rho}+P\right)^T, \tag{2.3}$$

则 (1.1) 式可以表示为下面平衡方程组的形式

$$U_t+F(U)_x=B(U). \tag{2.4}$$

我们将考虑方程组 (2.4) 带下述分片光滑初值条件

$$U(0,x)=\begin{cases} U_{+,0}(x), & x>0, \\ U_{-,0}(x), & x<0 \end{cases} \tag{2.5}$$

的黎曼问题的激波解.

在假设 (2.4) 式相应的奇次化方程组带下述分布常数初值时

$$U_0(0,x)=\begin{cases} U_{+,0}(0), & x>0, \\ U_{-,0}(0), & x<0, \end{cases}$$

其解为激波时，我们将主要讨论问题 (2.4)–(2.5) 的间断解 — 激波的局部存在性.

简单计算得， $A(U)$ 的特征值为

$$\lambda_1=u-a, \quad \lambda_2=u+a, \quad \lambda_3=c.$$

由于 $c$ 表示光速，所以我们不妨设 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 其对应的左特征向量为

$$l_1=(0,-(u+a),1), \quad l_2=(0,a-u,1), \quad l_3=(1,0,0).$$

而对应的右特征向量为

$$r_1=\left(0,-\frac{1}{2a},\frac{a-u}{2a}\right)^T, \quad r_2=\left(0,-\frac{1}{2a},-\frac{u+a}{2a}\right)^T, \quad r_3=(1,0,0)^T.$$

左右特征向量满足

$$l_i\cdot r_j=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

假设下述条件 (A1) 和 (A2) 成立.

(A1) 下述黎曼问题

$$\begin{cases} \partial_t U_0+\partial_x F(U_0)=0, \\ U_0(0,x)=\begin{cases} U_{+,0}(0_+), & x>0, \\ U_{-,0}(0_-), & x<0 \end{cases} \end{cases} \tag{2.6}$$

具有激波解

$$U_0(t,x)=\begin{cases}U_0^+, & x>\sigma t,\\ U_0^-, & x<\sigma t.\end{cases} \tag{2.7}$$

$U_0^\pm$ 在 $\{x=\sigma t\}$ 上满足下述 Rankine-Hugoniot 条件

$$(U_0^+-U_0^-)\sigma=F(U_0^+)-F(U_0^-).$$

设 $(\sigma,U_0^+(0,0),U_0^-(0,0))$ 为第一类激波，满足下述 Lax 熵条件

$$\begin{cases}\sigma<\lambda_1(U_0^-)<\lambda_2(U_0^-)<\lambda_3,\\ \lambda_1(U_0^+)<\sigma<\lambda_2(U_0^+)<\lambda_3.\end{cases}$$

(A2) 上述激波满足稳定性条件

$$[U_0(0)]=U_{+,0}(0)-U_{-,0}(0),r_2(U_{+,0}(0)),r_3(U_{+,0}(0))$$

为线性无关.

**注** 如 Lax 在文献 [10] 中所指出，当激波比较弱时，上述稳定性条件 (A2) 自动满足.

柯西问题 (2.4)–(2.5) 可以写成如下矩阵形式

$$\begin{cases}U_t+A(U)\cdot U_x=B(U),\\ U(0,x)=\begin{cases}U_{+,0}(x), & x>0,\\ U_{-,0}(x), & x<0.\end{cases}\end{cases} \tag{2.8}$$

由于我们将讨论问题 (2.8) 的局部解，由双曲方程的有限传播速度，我们可不妨设 $|x|\geq R$ 时， $U_{\pm,0}(x)$ 为常数. 令 $\omega\subset\{t=0\}$ 是原点的一邻域. $\aleph$ 是 $\omega$ 对于上面 Cauchy 问题 (2.8) 的某个决定区域.

本文将构造分片 $C^1$ 的弱解满足

$$\begin{cases}U(t,x)=\begin{cases}U_+(t,x), & x>x(t),\\ U_-(t,x), & x<x(t),\end{cases}\\ x(0)=0.\end{cases} \tag{2.9}$$

弱解 $U$ 在 $\aleph^\pm=\{\pm(x-x(t))>0\}$ 上满足方程 (2.8), 在 $\{x=x(t)\}$ 上满足 Rankine-Hugoniot 条件 $(U_+-U_-)x'(t)=F(U_+)-F(U_-)$, 并且满足 1 - 激波熵条件

$$\begin{cases}x'(t)<\lambda_1(U_-(t,x(t)))<\lambda_2(U_-(t,x(t)))<\lambda_3,\\ \lambda_1(U_+(t,x(t)))<x'(t)<\lambda_2(U_+(t,x(t)))<\lambda_3.\end{cases}$$

### 2.2 问题转化

问题 (2.8) 的 $(U_+,U_-,x(t))$ 未知，所以我们要讨论的是关于辐射流体力学方程组带自由边界的初边值问题中解的存在性. 因为 $x'(t)<\lambda_1^-<\lambda_2^-<\lambda_3$, 所以 $\aleph^-=\{x<x(t)\}$ 为问题 (2.8) 关于 $\{x<0\}$ 决定区域. 先在区域 $\aleph$ 中决定 $U_-$, 为此我们将 $U_{-,0}(x)$ 保持 $C^1$ 延拓到 $\{x\geq 0\}$, 记为 $\tilde U_{-,0}(x)$. 求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\tilde U_t+A(\tilde U)\cdot\tilde U_x=B(\tilde U),\\ \tilde U(0,x)=\tilde U_{-,0}(x),\end{cases} \tag{2.10}$$

得到局部 $\tilde{U}_-(t,x)\in C^1(0\le t<T,x\in\mathbb{R})$. 记 $U_-|_{\aleph^-}=\tilde{U}_-|_{\aleph^-}$, 由于 $\aleph^-$ 为 $\{x<0\}$ 的决定区域， $U_-$ 在 $U_-$ 上的值与上述延拓方式无关. 所以对问题 (2.8)–(2.9) 可以假设 $U_-$ 已知，即讨论下面的问题

$$\begin{cases}\partial_t U_+ + A(U_+)\cdot\partial_x U_+ = B(U_+), \qquad \text{in} \quad \aleph^+=\{x>x(t)\},\\ (U_+-U_-)\cdot x'(t)-(F(U_+)-F(U_-))=0, \qquad \text{on} \quad \{x=x(t)\},\\ U_+|_{t=0}=U_{+,0}(x), \qquad x>0.\end{cases} \tag{2.11}$$

在问题 (2.11) 中， $U_+, x(t)$ 均为未知量，所以为自由边界问题．为此，通过坐标变化

$$\begin{cases}\tilde{x}=x-x(t),\\ \tilde{t}=t,\end{cases}$$

可以将上述问题转化为固定区域的初边值问题 (2.12). 令 $\tilde{\aleph}^+=\{x>0\}$, 为了方便起见，我们仍然用 $(t,x)$ 来表示 $(\tilde{t},\tilde{x})$, 用 $\aleph^+$ 来表示 $\tilde{\aleph}^+$.

$$\begin{cases}\partial_t U_+ + (A(U_+)-x'(t)I)\cdot\partial_x U_+ = B(U_+), \qquad (t,x)\in(t>0,x>0),\\ (U_+-U_-)\cdot x'(t)-(F(U_+)-F(U_-))=0, \qquad \text{on} \quad \{x=0\},\\ x(0)=0,\\ U_+|_{t=0}=U_{+,0}(x), \qquad x>0.\end{cases} \tag{2.12}$$

### 2.3 相容性条件

为了讨论问题 (2.12), 先来讨论其相容性条件.

(1) 零阶相容性条件：由 (2.12) 式边值条件必须在 $\{x=t=0\}$ 处成立得到

$$x'(t)|_{t=0}[U_0(0)]=[F(U_0)], \tag{2.13}$$

其中 $[U_0(0)]=U_{+,0}(0)-U_{-,0}(0)$. 这即是上述假设 $\sigma(U_{+,0}(0)-U_{-,0}(0))=F(U_{+,0}(0))-F(U_{-,0}(0))$, 这由条件 (A1) 中的 Rankine-Hugoniot 条件得证.

(2) 一阶相容性条件：对 (2.12) 式的边值条件关于 $t$ 求导，将结果在 $\{x=t=0\}$ 上取值，得到

$$x''(0)[U_0(0)]+\sigma[\partial_t U|_{t=0}]-[A(U)\partial_t U|_{t=0}]=0. \tag{2.14}$$

另一方面，由 (2.12) 式中的方程及初值条件，我们有

$$\partial_t U_+(0,0)=(\sigma I-A(U_{+,0}(0)))d_x U_{+,0}(0)+B(U_{+,0}(0)). \tag{2.15}$$

将 (2.15) 式代入 (2.14) 式中，有问题 (2.12) 的一阶相容性条件

$$\begin{aligned}&x''(0)[U_0(0)]+(\sigma I-A(U_{+,0}(0)))^2 d_x U_{+,0}(0)\\ &=-(\sigma I-A(U_{+,0}(0)))\cdot B(U_{+,0}(0))+(\sigma I-A(U_{-,0}(0)))\cdot\partial_t U_-(0,0).\end{aligned} \tag{2.16}$$

将 (2.16) 式对角化后能更清楚地看出一阶相容性条件．令

$$T_+=(r_1(U_{+,0}(0)),r_2(U_{+,0}(0)),r_3(U_{+,0}(0))),\quad U_{+,0}(x)=T_+V_{+,0}(x).$$

则上述 (2.16) 式可以表述为

$$M \cdot \begin{pmatrix} x''(0) \\ \partial_x V^2_{+,0}(0) \\ \partial_x V^3_{+,0}(0) \end{pmatrix} = k - (\sigma - \lambda_1(U_{+,0}(0)))^2 \cdot r_1(U_{+,0}(0)) \cdot \partial_x V^1_{+,0}(0). \tag{2.17}$$

其中

$$M = ([U_0(0)], (\sigma - \lambda_2(U_{+,0}(0)))^2 \cdot r_2(U_{+,0}(0)), (\sigma - \lambda_3(U_{+,0}(0)))^2 \cdot r_3(U_{+,0}(0))),$$

$$k = -(\sigma I - A(U_{+,0}(0))) \cdot B(U_{+,0}(0)) + (\sigma I - A(U_{-,0}(0))) \cdot \partial_t U_-(0,0).$$

由稳定性条件 (A2), 可知 $M$ 是可逆阵. 有

$$\begin{pmatrix} x''(0) \\ \partial_x V^2_{+,0}(0) \\ \partial_x V^3_{+,0}(0) \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot (k - (\sigma - \lambda_1(U_{+,0}(0)))^2 \cdot r_1(U_{+,0}(0)) \cdot \partial_x V^1_{+,0}(0)). \tag{2.18}$$

那么 (2.18) 式中的第二和第三个等式是所需要的一阶相容性条件, 而由第一个等式, 可以得出 $x''(0)$.

本文主要证明的定理如下.

**定理 2.1** 设初值 $U_{\pm,0}(x) \in C^1(\omega_\pm)$ 满足上述相容性条件 (2.13) 和 (2.18), 则存在 $T > 0$, 使得问题 (2.12) 存在唯一解 $(U_+, x(t))$, $U_+ \in C^1(\aleph^+_T), x(t) \in C^2[0,T]$, 其中

$$\aleph^+_T = \aleph^+ \bigcap \{t < T\}.$$

**注** 由于 2.2 节中坐标变换 $\begin{cases} \tilde{x} = x - x(t), \\ \tilde{t} = t \end{cases}$ 可逆, 由定理 2.1 可得原问题 (2.8) 的 1 - 激波解的局部存在性.

## 3 激波的存在性

本章来证明定理 2.1. 对非线性问题 (2.12), 我们先构造它的零阶近似解, 然后利用迭代格式构造它的近似解序列. 接着通过一系列的先验估计与紧性理论来得到近似解序列的收敛性. 此时, 近似解序列的极限就是问题 (2.12) 的解, 这也就证明了定理 2.1, 进而说明了原辐射流体力学方程组 (1.1) 激波解的局部存在性.

### 3.1 零阶近似解的构造

引入记号

$$L(U_+, x(t)) = \partial_t + (A(U_+) - x'(t)I)\partial_x, \tag{3.1}$$

$$G(U_+, x'(t)) = x'(t)[U] - [F(U)]. \tag{3.2}$$

问题 (2.12) 可以写成

$$\begin{cases} L(U_+, x(t))U_+ = B(U_+), \qquad t, x > 0, \\ G(U_+, x'(t)) = 0, \qquad x = 0, \\ x(0) = 0, \\ U_+(0,x) = U_{+,0}(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

在相容性条件 (2.13) 和 (2.18) 的假设下，我们先构造出问题 (3.3) 的一个近似解 $(U_+^0, x^0(t))$, 使得 $U_+^0 \in C^1(\aleph^+), x^0(t) \in C^2[0,T]$ 且 $t=0$ 时，下式成立

$$\begin{cases} L(U_+^0, x^0(t))U_+^0 = B(U_+^0), \\ d_t^k G(U_+^0, d_t x^0(t)) = 0 \qquad (k=0,1), \\ x^0(0) = 0, \\ U_+^0(0,x) = U_{+,0}(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

$k \in \{0,1\}$, 令 $m^k(x) = \partial_t^k U_+^0(0,x)$, (3.3) 式中的初值条件说明 $m^0(x) = U_{+,0}(x) \in C^1(\omega^+)$, 而由 (3.3) 式中方程，能推出 $m^1(x) \in C^0(\omega^+)$.

构造 (3.3) 式的近似解 $U_+^0$, 我们有下面的引理 3.1. 引理 3.1 的证明思路请参看王亚光的文章 [18, 引理 3.1].

**引理 3.1** 给定函数 $m^0 \in C^1(\omega)$, 记

$$m^1(x) = -(A(m^0(x)) - \sigma I)d_x m^0(x) + B(m^0(x)). \tag{3.5}$$

由 (3.3) 式得到，存在函数 $U_+^0 \in C^1(\aleph^+)$, 使得

$$U_+^0(0,x) = m^0(x), \quad \partial_t U_+^0(0,x) = m^1(x), \tag{3.6}$$

在 $t=0$ 处，有

$$\partial_t U_+^0 + (A(U_+^0) - \sigma I)\partial_x U_+^0 = B(U_+^0). \tag{3.7}$$

令 $b = x''(0)$ 是由 (2.18) 式中得到的．我们通过下面的引理来定义 (3.3) 式中的近似解 $x^0(t) \in C^2[0,T]$.

**引理 3.2** 令 $U_+^0 \in C^1(\aleph^+)$ 是 (3.3) 式如上给出的近似解，则存在 $x^0(t) \in C^2[0,T]$, 且满足

$$\begin{cases} d_t^k G(U_+^0, d_t x^0(t))|_{t=0} = 0 \qquad (k=0,1), \\ x^0(0) = 0, \quad d_t x^0(0) = \sigma, \quad d_t^0 x^0(0) = b. \end{cases} \tag{3.8}$$

引理 3.2 的证明可参见文献 [18, 引理 3.2].

综上，我们有

**命题 3.1** 在相容性条件 (2.13) 和 (2.18) 假设下，存在 $(U_+^0, x^0(t))$ 使得 $U_+^0 \in C^1(\aleph^+)$, $x^0(t) \in C^2[0,T]$, 且满足 $t=0$ 时，下式成立

$$\begin{cases} L(U_+^0, x^0(t))U_+^0 = B(U_+^0), \\ d_t^k G(U_+^0, d_t x^0(t)) = 0 \qquad (k=0,1), \\ x^0(0) = 0, \\ U_+^0(0,x) = U_{+,0}(x). \end{cases}$$

### 3.2 近似解序列的构造

由 (3.2) 式中 $G(U_+, x'(t))$ 的定义， $G$ 在 $U_+, x'(t)$ 处的 Fréchet 导数作用到 $(V_+, \varphi'(t))$ 上后为

$$G'_{(U_+, x'(t))}(V_+, \varphi'(t)) = (x'(t)I - A(U_+))V_+ + [U]\varphi'(t). \tag{3.9}$$

给出满足命题 3.1 的 $(U_+^0, x^0(t))$ 作为零阶近似解，对问题 (2.12), 通过迭代格式来构造近似解序列.

$$\begin{cases} L(U_+^\gamma, x^\gamma(t))U_+^{\gamma+1} = B(U_+^\gamma), \\ G'_{(U_+^\gamma, d_t x^\gamma(t))}(U_+^{\gamma+1}, d_t x^{\gamma+1}(t)) = -G(U_+^\gamma, d_t x^\gamma(t)) + G'_{(U_+^\gamma, d_t x^\gamma(t))}(U_+^\gamma, d_t x^\gamma(t)), \\ x^{\gamma+1}(0) = 0, \\ U_+^{\gamma+1}(0,x) = U_{+,0}(x). \end{cases} \tag{3.10}$$

即对 (2.12) 式中的方程用 Picard 迭代，对边值条件用 Newton 迭代，问题 (3.10) 满足相容性条件 (2.13) 和 (2.18).

为了研究迭代过程 (3.10), 我们首先来讨论一类线性化问题 (3.11), 对此，我们有下面命题 3.2 的结论．从而给出了问题 (3.10) 解的局部存在性和先验估计，为 3.4 节中证明近似解序列的收敛性做准备．命题 3.2 的证明放在 3.3 节中给出．考虑下述线性问题

$$\begin{cases} L(U_+, x(t))V_+ = B(U_+) + f, \\ G'_{(U_+, x'(t))}(V_+, \varphi'(t)) = g(t), \\ \varphi(0) = 0, \\ V_+(0,x) = U_{+,0}(x). \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $U_+ \in C^1(\aleph_T^+), x(t) \in C^2(0,T)$, 且 $f \in C^1(\aleph_T^+)$, $g \in C^1[0,T]$ 是给定的，且满足 (3.11) 式直到一阶的相容性条件.

对 (3.11) 式作估计, 为了方便起见, 先引进记号 $\omega_s^+ = \aleph^+ \bigcap \{t = s\}$, 用 $\|u(t)\|$ 表示 $u(t,\cdot)$ 的 $L^\infty(\omega_t^+)$ 范数； $\|u(t)\|_1 = \|u(t)\| + \|\nabla u(t)\|$ 表示 $u(t,\cdot)$ 的 $W^{1,\infty}(\omega_t^+)$. 类似的，我们用 $\|u\|_t$ 和 $\|u\|_{1,t}$ 分别表示 $u$ 的 $L^\infty(\aleph_t^+)$ 范数和 $W^{1,\infty}(\aleph_t^+)$ 范数．对于任意 $\phi \in L^\infty[0,T]$, 也用 $\|\phi\|_t$ 表示 $\|\phi\|_{L^\infty[0,t]}$ 范数， $\forall t \in (0,T]$.

**命题 3.2** (1) 如果 $f \in C^0(\aleph_T), g \in C^0[0,T]$, 且满足 (3.11) 式的零阶相容性条件，则问题 (3.11) 存在唯一弱解 $V_+ \in C^0(\aleph_T^+), \varphi \in C^1[0,T]$. 而且，存在常数 $C > 0$, 使得

$$|d_t\varphi(t)| + \|V_+(t)\| \le C\mathrm{e}^{CMt}(\|g\|_t + \|U_{+,0}\| + \int_0^t \|f(s) + B(U_+(s))\|\mathrm{d}s) \tag{3.12}$$

对 $\forall t \in (0,T]$ 成立.

(2) 如果 $(f,g) \in C^1$, 且满足 (3.11) 式的一阶相容性条件，则问题 (3.11) 存在唯一的弱解 $V_+ \in C^1(\aleph_T^+), \varphi \in C^2[0,T]$, 其中 $M$ 为一个常数，且有

$$\begin{aligned} &|d_t^2\varphi(t)| + \|\nabla_{(t,x)}V_+(t)\| \\ \le{}& C\exp(CMt\mathrm{e}^{CMt})(\|d_t g\|_t + \|f(0)\| + \|B(U_+(0))\| + \|d_x U_{+,0}\| + M(\|g\|_t + \|U_{+,0}\|) \\ &+ \int_0^t (\|\partial_t f(s)\| + M\|f(s)\| + \|B(U_+(s))\|)\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{3.13}$$

### 3.3 命题 3.2 的证明

在这一节中将给出命题 3.2 的证明．在给出证明前先对 (3.11) 式对角化，令

$$T_+ = (r_1(U_+), r_2(U_+), r_3(U_+)).$$

而 $\{r_i, l_i\}_{i=1}^3$ 由前已经给出，令

$$V_+ = T_+ \tilde{V}_+, \tag{3.14}$$

而

$$\tilde{L}(U_+, x(t)) = \partial_t + (\Lambda(U_+) - x'(t)I)\partial_x, \tag{3.15}$$

其中

$$\Lambda(U) = \mathrm{diag}[\lambda_1(U), \lambda_2(U), \lambda_3(U)], \tag{3.16}$$

而且 $(\partial T_+)(T_+)^{-1} = -T_+\partial(T_+)^{-1}$, 那么 (3.11) 式等价于

$$\begin{cases} \tilde{L}(U_+, x(t))\tilde{V}_+ = (T_+)^{-1}(B(U_+) + f) + (\tilde{L}(U_+, x(t))(T_+)^{-1})T_+\tilde{V}_+, \\ \tilde{G}'_{(U_+, x'(t))}(\tilde{V}_+, \varphi'(t)) = g(t), \\ \varphi(0) = 0, \\ \tilde{V}_+(0, x) = \tilde{V}_{+,0}(x) = (T_+)^{-1}U_{+,0}(x), \end{cases} \tag{3.17}$$

其中

$$\tilde{G}'_{(U_+, x'(t))}(\tilde{V}_+, \varphi'(t)) = \sum_{i=1}^{3}(x'(t) - \lambda_i(U_+))r_i(U_+)\tilde{V}_+ + (U_+ - U_-)\varphi'(t). \tag{3.18}$$

要研究 (3.17) 式，首先考虑对角问题

$$\begin{cases} \tilde{L}(U_+, x(t))V_+ = B(U_+) + f, \\ \tilde{G}'_{(U_+, x'(t))}(V_+, \varphi'(t)) = g(t), \\ \varphi(0) = 0, \\ V_+(0, x) = V_{+,0}(x), \end{cases} \tag{3.19}$$

其中 $f \in C^1(\aleph_T^+)$, $g \in C^1[0, T]$ 满足 (3.19) 式的相容性条件一直到一阶. 将 $V_+$ 分解成两部分

$$V_{+,I} = V_{+,1}, \qquad V_{+,II} = (V_{+,2}, V_{+,3})^T. \tag{3.20}$$

同样把 $(f, B, V_{+,0})$ 也同上分解为 $f_I, f_{II}; B_I, B_{II}$ 和 $V_{+,0}^I, V_{+,0}^{II}$. 而由 Lax 熵条件可知，第一类激波满足

$$\lambda_i(U_+) - x'(t) \begin{cases} < 0, & i = 1, \\ > 0, & i = 2, 3. \end{cases} \tag{3.21}$$

说明对于 $V_{+,I}$ 部分而言， (3.19) 式是一个初值问题，而对于 $V_{+,II}$ 部分而言， (3.19) 式是一个混合问题. 对于 $V_{+,I}$ 部分，容易得到

**引理 3.3** (1) 对于 $U_+ \in C^1(\aleph_T^+), x(t) \in C^2[0, T], f_I \in C^0(\aleph_T^+), V_{+,0} \in C^0(\omega^+)$, 则对于问题 (3.19) 的第一部分而言存在唯一弱解 $V_{+,I} \in C^0(\aleph_T^+)$, 而且对于 $\forall t \in (0, T]$, 有

$$\|V_{+,I}(t)\| \le \|V_{+,0}^I\| + \int_0^t \|f_I(s) + B_I(U_+(s))\|\mathrm{d}s. \tag{3.22}$$

(2) 存在常数 $C, M > 0$, 有

$$\begin{aligned} \omega(\delta, t; V_{+,I}) \le{}& C\mathrm{e}^{CMt}\omega(\delta; V_{+,0}^I) + \delta\|f_I + B_I(U_+)\|_t \\ &+ \int_0^t C\mathrm{e}^{CM(t-s)}\omega(\delta, s; f_I + B_I(U_+))\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$\omega(\delta,t;U)=\sup|U(s,x)-U(s',x')|. \tag{3.24}$$

上述 sup 是在 $\{(s,x)\in\ \aleph_T^+,(s',x')\ \in\ \aleph_T^+,|(s,x)-(s',x')|\le\delta\}$ 上选取的.

**证** 证明很简单，其想法主要是将 $V_{+,I}$ 直接可以通过沿特征线积分得出. 下面将重点考虑 $V_{+,II}$, 而通过对 $V_{+,II}$ 估计的证明，可以类似证得引理 3.3.

对于 (3.19) 式的第 $II$ 部分而言，有

$$\begin{cases}\partial_t V_{+,II}+\Theta_{II}(U_+,x(t))\partial_x V_{+,II}=f_{II}+B_{II},\\ M\cdot(\varphi'(t),V_{+,2},V_{+,3})^T=g(t)+(\lambda_1(U_+)-x'(t))r_1(U_+)V_{+,1},\\ \varphi(0)=0,\\ V_{+,II}(0,x)=V_{+,0}^{II}(x),\end{cases} \tag{3.25}$$

其中 $V_{+,1}\in C^0(\aleph^+)$ 可以由引理 3.3 得到.

$$\Theta_{II}(U_+,x(t))=(\Lambda_{II}(U_+)-x'(t)I)=\mathrm{diag}[\lambda_2(U_+)-x'(t),\lambda_3(U_+)-x'(t)]$$

为正系数矩阵， $\Lambda_{II}(U_+)=\mathrm{diag}[\lambda_2(U_+),\lambda_3(U_+)]$. 由 (A2) 的稳定性条件，矩阵

$$M=((U_+-U_-),(x'(t)-\lambda_2(U_+))r_2(U_+),(x'(t)-\lambda_3(U_+))r_3(U_+))$$

是可逆的.

在不失普遍性的意义下，分析问题 (3.25) 中的分量 $V_{+,2}$, 显然有

$$\begin{cases}\partial_t V_{+,2}+(\lambda_2(U_+)-x'(t))\partial_x V_{+,2}=f_2+B_2,\\ V_{+,2}(t,0)=a_2(t),\\ V_{+,2}(0,x)=V_{+,0}^2(x).\end{cases} \tag{3.26}$$

$a_2(t)$ 是 $(M)^{-1}\cdot(g(t)+(\lambda_1(U_+)-x'(t))r_1(U_+)V_{+,1})$ 的第二个分量， (3.26) 式中相容性条件一直到一阶都满足. 对于 (3.26) 式，我们是通过特征线来求解的. ▌

**引理 3.4** (1) 对于任意 $V_{+,0}^2\in C^0(\omega^+),f_2\in C^0(\aleph_T^+)$, 对于 (3.26) 式而言存在唯一的弱解 $V_{+,2}\in C^0(\aleph_T^+)$, 而且对 $\forall t\in(0,T]$, 有

$$\|V_{+,2}(t)\|\le\|a_2\|_t+\|V_{+,0}^2\|+\int_0^t\|f_2(s)+B_2(U_+(s))\|\mathrm{d}s. \tag{3.27}$$

(2)

$$\omega(\delta,t;V_{+,2})\le C\mathrm{e}^{CMt}(\omega(\delta,t;a_2)+\omega(\delta,V_{+,0}^2)+\delta\|f_2+B_2\|_t+\int_0^t\omega(\delta,s;f_2+B_2)\mathrm{d}s). \tag{3.28}$$

**证** 令 $s\to(s,\Upsilon(s;t,x))$ 是经过点 $(t,x)$ 的 (3.26) 式的特征曲线，那么 $\Upsilon(s;t,x)$ 是以下问题的解

$$\begin{cases}d_s\Upsilon(s;t,x)=\lambda_2(U_+(s,\Upsilon(s;t,x)))-x'(s),\\ \Upsilon(t;t,x)=x.\end{cases} \tag{3.29}$$

令 $s_1(t,x)$ 使得下式成立

$$\Upsilon(s_1(t,x);t,x)=0, \tag{3.30}$$

且 $\tilde{\aleph}_T^+ = \{(s,t,x)|\max(0,s_1(t,x)) \leq s \leq x, \quad (t,x) \in \aleph_T^+\}$.

由常微分方程的理论，有 $\Upsilon(s;t,x) \in C^1(\tilde{\aleph}_T^+)$. 对于 $(t,x) \in \aleph_T^+$, 有两种情况.

情况 1 $s_1(t,x) < 0$. 在这种情况下， (3.26) 式关于 $V_{+,2}$ 是 Cauchy 问题，有显式解

$$V_{+,2}(t,x) = V_{+,0}^2(\Upsilon(0;t,x)) + \int_0^t f_2(s,\Upsilon(s;t,x))\mathrm{d}s + B_2(U_+(s,\Upsilon(s;t,x)))\mathrm{d}s. \tag{3.31}$$

情况 2 $s_1(t,x) \geq 0$. (3.26) 式的解为

$$V_{+,2}(t,x) = a_2(s_1(t,x)) + \int_{s_1(t,x)}^t f_2(s,\Upsilon(s;t,x))\mathrm{d}s + B_2(U_+(s,\Upsilon(s;t,x)))\mathrm{d}s. \tag{3.32}$$

由 (3.31) 和 (3.32) 式，可以推出 (3.27) 式.

下面证明 (3.28) 式. 对于 $\forall\delta > 0, t \in (0,T]$ 以及 $(t_i,x_i) \in \aleph_t^+ \quad (i=1,2)$ 且 $|(t_1,x_1) - (t_2,x_2)| < \delta$, 我们将对 $V_{+,2}(t_1,x_1) - V_{+,2}(t_2,x_2)$ 的估计分成三类讨论.

情况 $(\alpha)$ $s_1(t_i,x_i) < 0 \quad (i=1,2)$. 由 (3.26) 式 $V_{+,2}(t_i,x_i)$ 的 Cauchy 问题，得

$$\begin{aligned}
&|V_{+,2}(t_1,x_1) - V_{+,2}(t_2,x_2)| \\
\leq{}& C\mathrm{e}^{CMt}\omega(\delta, V_{+,0}^2) + \delta\|f_2 + B_2\|_t + \int_0^t C\mathrm{e}^{CM(t-s)}\omega(\delta,s;f_2 + B_2(U_+))\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

情况 $(\beta)$ $s_1(t_i,x_i) \geq 0 \quad (i=1,2)$. 由 (3.32) 式有

$$\begin{aligned}
&V_{+,2}(t_1,x_1) - V_{+,2}(t_2,x_2) \\
={}& a_2(s_1(t_1,x_1)) - a_2(s_1(t_2,x_2)) \\
&+ \int_{s_1(t_1,x_1)}^{t_1} (f_2(s,\Upsilon(s;t_1,x_1))\mathrm{d}s + B_2(U_+(s,\Upsilon(s;t_1,x_1)))\mathrm{d}s) \\
&- \int_{s_1(t_2,x_2)}^{t_2} (f_2(s,\Upsilon(s;t_2,x_2))\mathrm{d}s + B_2(U_+(s,\Upsilon(s;t_2,x_2)))\mathrm{d}s).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

而由 (3.30) 式中 $s_1(t,x)$ 的定义可知 $0 = d_s\Upsilon(s_1(t,x);t,x) \cdot \partial s_1(t,x) + \partial\Upsilon(s_1(t,x);t,x)$. 所以

$$\begin{aligned}
\partial s_1(t,x) &= -(d_s\Upsilon(s_1(t,x);t,x))^{-1} \cdot (\partial\Upsilon)(s_1(t,x);t,x) \\
&= (x'(t) - \lambda_2(U_+))^{-1} \cdot (\partial\Upsilon)(s_1(t,x);t,x).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

其中 $\partial = \partial_t$ 或 $\partial = \partial_x$, 而

$$|\partial_{(t,x)}\Upsilon(s;t,x)| \leq C\mathrm{e}^{CM(t-s)}. \tag{3.36}$$

(3.36) 式的推导如下

$$\begin{cases}
\partial_s\Upsilon(s;t,x) = \lambda(U(s,\Upsilon(s;t,x))), \\
\Upsilon(t;t,x) = x,
\end{cases}$$

由此，可以得到 $\Upsilon(s;t,x) = x + \int_s^t \lambda(U(\tau,\Upsilon(\tau;t,x)))\mathrm{d}\tau$.

1) $\partial_x\Upsilon(s;t,x) = 1 + \int_s^t \nabla_u\lambda \cdot U_x \cdot \partial_x\Upsilon(\tau;t,x)\mathrm{d}\tau$.

$$|\partial_x\Upsilon(s;t,x)| \leq 1 + C_1M\int_s^t |\partial_x\Upsilon(\tau;t,x)|\mathrm{d}\tau.$$

再由 Gronwall 不等式得 $|\partial_x\Upsilon(s;t,x)|\le \mathrm{e}^{C_1M\int_s^t\mathrm{d}\tau}=\mathrm{e}^{C_1M(t-s)}$.

2) $\partial_t\Upsilon(s;t,x)=1+\int_s^t\nabla_u\lambda\cdot U_t\cdot\partial_t\Upsilon(\tau;t,x)\mathrm{d}\tau+\lambda(U(\tau,\Upsilon(\tau;t,x)))$.

$$|\partial_t\Upsilon(s;t,x)|\le C_2+C_1M\int_s^t|\partial_t\Upsilon(\tau;t,x)|\mathrm{d}\tau.$$

再利用 Gronwall 不等式得到 $|\partial_t\Upsilon(s;t,x)|\le C_2\mathrm{e}^{C_1M\int_s^t\mathrm{d}\tau}=C_2\mathrm{e}^{C_1M(t-s)}$.

取 $C=\max\{C_1,C_2\}$, 得到 (3.36) 式.

将 (3.36) 式的估计代入 (3.35) 式中得：当 $s_1(t,x)\ge 0$ 时，有

$$|\partial_{(t,x)}s_1(t,x)|\le C\mathrm{e}^{CMt}. \tag{3.37}$$

所以再考虑 (3.34) 式，就有

$$\begin{aligned}&|V_{+,2}(t_1,x_1)-V_{+,2}(t_2,x_2)|\\ \le{}& C\mathrm{e}^{CMt}(\omega(\delta,t;a_2)+\delta\|f_2+B_2\|_t+\int_0^t\omega(\delta,s;f_2+B_2)\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{3.38}$$

情况 $(\gamma)$ $s_1(t_1,x_1)\ge 0$ 而 $s_1(t_2,x_2)<0$, 反过来的情况也一样讨论. 由 (3.31) 和 (3.32) 式，有

$$\begin{aligned}&V_{+,2}(t_1,x_1)-V_{+,2}(t_2,x_2)\\ ={}&a_2(s_1(t_1,x_1))-V_{+,0}^2(t_2,x_2)\\ &+\int_{s_1(t_1,x_1)}^{t_1}(f_2(s,\Upsilon(s;t_1,x_1))\mathrm{d}s+B_2(U_+(s,\Upsilon(s;t_1,x_1)))\mathrm{d}s)\\ &-\int_0^{t_2}(f_2(s,\Upsilon(s;t_2,x_2))\mathrm{d}s+B_2(U_+(s,\Upsilon(s;t_2,x_2)))\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{3.39}$$

很明显，当 $(t_i,x_i)\in\aleph_t^+:|(t_1,x_1)-(t_2,x_2)|<\delta$, 利用 (3.36) 和 (3.37) 式，有

$$0\le s_1(t_1,x_1)\le s_1(t_1,x_1)-s_1(t_2,x_2)\le C\mathrm{e}^{CMt}\delta, \tag{3.40}$$

$$0\le\Upsilon(0;t_2,x_2)\le\Upsilon(0;t_2,x_2)-\Upsilon(0;t_1,x_1)\le C\mathrm{e}^{CMt}\delta. \tag{3.41}$$

再对 (3.39) 式使用这种估计，有

$$\begin{aligned}&|V_{+,2}(t_1,x_1)-V_{+,2}(t_2,x_2)|\\ \le{}& C\mathrm{e}^{CMt}(\omega(\delta,t;a_2)+\omega(\delta,V_{+,0}^2)+\delta\|f_2+B_2\|_t+\int_0^t\omega(\delta,s;f_2+B_2)\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{3.42}$$

将上述三种情况一归纳，得 (3.28) 式. ▌

由引理 3.3 和引理 3.4, 可以推出下面的引理 3.5.

**引理 3.5** (1) $\forall f\in C^0(\aleph_T^+), V_{+,0}\in C^0(\omega^+)$, 满足 (3.19) 式的零阶相容性条件，那么 (3.19) 式存在唯一的弱解 $V_+\in C^0(\aleph_T^+),\varphi\in C^1[0,T]$, 而且存在常量 $C>0$, 使得对 $\forall t\in(0,T]$, 有

$$|d_t\varphi(t)|+\|V_+(t)\|\le C(\|g\|_t+\|V_{+,0}\|+\int_0^t\|f(s)+B(U_+(s))\|\mathrm{d}s). \tag{3.43}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\omega(\delta,t;d_t\varphi(t))+\omega(\delta,t;V_+)\\&\le C\mathrm{e}^{CMt}(\omega(\delta,t;g)+\omega(\delta,V_{+,0})+\delta\|f+B\|_t+\int_0^t\omega(\delta,s;f+B)\mathrm{d}s).\end{aligned}\tag{3.44}$$

对于引理 3.5 还可以做进一步的研究，不加证明地给出引理 3.6 (证明参看文献 [3]).

**引理 3.6** 条件和引理 3.5 相同，如果 $g\in C^1[0,T],f\in C^0(\aleph_T^+)$ 有形式

$$f_i=\rho_i(\partial_t\sigma_i+(\lambda_i(U_+)-x'(t))\partial_x\sigma_i),\tag{3.45}$$

当 $(\rho_i,\sigma_i)\in C^1,i\in\{1,2,3\}$, 则问题 (3.19) 的解 $V_+\in C^1(\aleph_T^+),\varphi\in C^2[0,T]$.

有了引理 3.6, 可以给出命题 3.2 的证明.

**命题 3.2 的证明** (1) 在研究 (3.11) 式之前，先考虑对角问题 (3.17), 可以由迭代格式

$$\begin{cases}\tilde L(U_+,x(t))\tilde V_+^{\gamma+1}=(T_+)^{-1}(B(U_+)+f)+(\tilde L(U_+,x(t))(T_+)^{-1})T_+\tilde V_+^{\gamma},\\ \tilde G'_{(U_+,x'(t))}(\tilde V_+^{\gamma+1},\varphi'(t)^{\gamma+1})=g(t),\\ \varphi(0)^{\gamma+1}=0,\\ \tilde V_+^{\gamma+1}(0,x)=\tilde V_{+,0}(x).\end{cases}\tag{3.46}$$

第一个近似解的构造类似于命题 3.1, $\tilde V_+^0\in C^1(\aleph_T^+),\varphi^0\in C^2[0,T]$. 在命题 3.2(1) 的假设下，将估计 (3.43) 应用在 (3.46) 式上，则存在常量 $C>0$, 使得对 $\forall\gamma\ge0,t\in(0,T]$, 有

$$\begin{aligned}&|d_t\varphi^{\gamma+1}(t)|+\|\tilde V_+^{\gamma+1}(t)\|\\&\le C(\|g\|_t+\|\tilde V_{+,0}\|+\int_0^t(\|f(s)+B(U_+(s))\|+M\|\tilde V_+^{\gamma}(s)\|)\mathrm{d}s).\end{aligned}\tag{3.47}$$

由归纳法，可知 $\tilde V_+^{\gamma}\in C^0(\aleph_T^+),\varphi^{\gamma}\in C^1[0,T]$. 由 Gronwall 不等式，得

$$|d_t\varphi^{\gamma}(t)|+\|\tilde V_+^{\gamma}(t)\|\le C\mathrm{e}^{CMt}(\|g\|_t+\|\tilde V_{+,0}\|+\int_0^t\|f(s)+B(U_+(s))\|\mathrm{d}s).\tag{3.48}$$

另外，将 (3.43) 式用到问题 $(\tilde V_+^{\gamma+1}-\tilde V_+^{\gamma},\varphi^{\gamma+1}-\varphi^{\gamma})$

$$\begin{cases}\tilde L(U_+,x(t))(\tilde V_+^{\gamma+1}-\tilde V_+^{\gamma})=(\tilde L(U_+,x(t))(T_+)^{-1})T_+(\tilde V_+^{\gamma}-\tilde V_+^{\gamma-1}),\\ \tilde G'_{(U_+,x'(t))}(\tilde V_+^{\gamma+1}-\tilde V_+^{\gamma},\varphi'(t)^{\gamma+1}-\varphi'(t)^{\gamma})=0,\\ \varphi^{\gamma+1}-\varphi^{\gamma}|_{t=0}=\tilde V_+^{\gamma+1}-\tilde V_+^{\gamma}|_{t=0}=0,\end{cases}\tag{3.49}$$

有

$$|d_t(\varphi^{\gamma+1}-\varphi^{\gamma})(t)|+\|(\tilde V_+^{\gamma+1}-\tilde V_+^{\gamma})(t)\|\le CM\int_0^t\|\tilde V_+^{\gamma}-\tilde V_+^{\gamma-1}(s)\|\mathrm{d}s.$$

通过对 $\gamma$ 的归纳，得

$$|d_t(\varphi^{\gamma+1}-\varphi^{\gamma})(t)|+\|(\tilde V_+^{\gamma+1}-\tilde V_+^{\gamma})(t)\|\le\frac{(CMt)^{\gamma}}{\gamma!}\|\tilde V_+^0\|_T.\tag{3.50}$$

因为 (3.43) 式作用在 (3.17) 式且 $(f,g,U_{+,0})=0$, 所以 (3.17) 式的弱解 $(\tilde{V}_+,d_t\varphi)$ 在 $L^\infty$ 唯一. 再由 (3.48) 和 (3.58) 式, 我们可以得到 $\tilde{V}_+^\gamma$ 在中 $C^0(\aleph_T^+)$ 收敛, $\varphi^\gamma$ 在 $C^1[0,T]$ 中收敛, 极限 $\tilde{V}_+\in C^0(\aleph_T^+),\varphi\in C^1[0,T]$ 是 (3.17) 式的唯一弱解且满足

$$|d_t\varphi(t)|+\|\tilde{V}_+(t)\|\le C\mathrm{e}^{CMt}(\|g\|_t+\|\tilde{V}_{+,0}\|+\int_0^t\|f(s)+B(U_+(s))\|\mathrm{d}s),$$

对 $\forall t\in(0,T]$.

(2) 因为 (3.46) 式的右端项有 (3.45) 式的形式, 所以对 (3.46) 式利用引理 3.6 可知 $\tilde{V}_+^\gamma\in C^1(\aleph_T^+),\varphi^\gamma\in C^2[0,T]$. 再对 $\nabla\tilde{V}_+^\gamma$ 和 $d_t^2\varphi^\gamma$ 利用参考文献 [5] 中类似于引理 3.5(2) 的引理, 可知 $\{\nabla\tilde{V}_+^\gamma,d_t^2\varphi^\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{N}}$ 等度连续. 于是得在 $C^1(\aleph_T^+)$ 中 $\tilde{V}_+^\gamma\to\tilde{V}_+$, 在 $C^2[0,T]$ 中 $\varphi^\gamma\to\varphi$. 所以对于问题 (3.11) 而言, 问题 (3.11) 的解 $V_+\in C^1(\aleph_T^+),\varphi\in C^2[0,T]$. 下面估计 $\nabla V_+$ 和 $d_t^2\varphi$. 令 $J_+=\partial_tV_+,\phi=d_t\varphi$, 对 (3.11) 式关于 $t$ 求导, 得 $(J_+,\phi)$ 满足

$$\begin{cases}L(U_+,x(t))J_+=Q,\\ G'_{(U_+,x'(t))}(J_+,\phi')=\kappa(t),\\ J_+(0,x)=J_{+,0}(x).\end{cases}\tag{3.51}$$

其中

$$\begin{aligned}Q=&(\partial_tf+\nabla B(U_+)\cdot\partial_tU_+)-\nabla A(U_+)(\partial_tU_+,D\cdot(f+B(U_+)-J_+))\\&+x''(t)D\cdot(f+B(U_+)-J_+),\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$D=(A(U_+)-x'(t)I)^{-1},$$

$$\kappa(t)=d_tg(t)-x''(t)I\cdot V_++\nabla A(U_+)(\partial_tU_+,V_+)-[\partial_tU]\phi,\tag{3.53}$$

$$J_{+,0}(x)=f(0,x)+B(U_+(0,x))-(A(U_+)-x'(t)I)|_{t=0}\cdot d_xU_{+,0}(x).\tag{3.54}$$

将 (3.12) 式应用到问题 (3.51) 中, 得到

$$|d_t\phi(t)|+\|J_+(t)\|\le C\mathrm{e}^{CMt}(\|\kappa\|_t+\|J_{+,0}\|+\int_0^t\|Q(s)\|\mathrm{d}s).\tag{3.55}$$

由 (3.52) 式, 我们有

$$\|Q(s)\|\le C(\|\partial_tf(s)\|+M\|f(s)\|+M\|B(s)\|+M\|J_+\|).\tag{3.56}$$

由 (3.53) 式, 有

$$\|\kappa(t)\|_t\le\|d_tg\|_t+M(\|\phi\|_t+C\|V_+\|_t).\tag{3.57}$$

明显, 再由 (3.12) 式, 有

$$\|\kappa(t)\|_t\le\|d_tg\|_t+CM\mathrm{e}^{CMt}(\|g\|_t+\|U_{+,0}\|+\int_0^t\|f(s)+B(U_+(s))\|\mathrm{d}s).\tag{3.58}$$

将 (3.56) 和 (3.58) 式代入 (3.55) 式中, 由 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned}&|d_t\phi(t)|+\|J_+(t)\|\\\le&C\exp(CMt\mathrm{e}^{CMt})(\|d_tg\|_t+\|f(0,x)\|+\|B(U_+(0,x))\|+\|d_xU_{+,0}\|\\&+M(\|g\|_t+\|U_{+,0}\|)+\int_0^t(\|\partial_tf(s)\|+M\|f(s)\|+\|B(U_+(s))\|)\mathrm{d}s).\end{aligned}\tag{3.59}$$

通过 (3.13) 式，可以很容易得到 $\partial_x V_+$ 的估计．这样 (3.11) 式也得到了证明． ▌

**3.4 近似解序列的收敛性**

由 3.2 里已经构造出了迭代序列，给出了迭代格式 (3.10) 解的局部存在性和先验估计，在这一节中由引理 3.7 证得定理 2.1.

**引理 3.7** 假设问题 (3.3) 有 $|d_t x - d_t x^0| + \|U_+ - U_+^0\| \le \eta < 1$, 使得对于迭代格式 (3.10), 存在 $|d_t x^\gamma - d_t x^0| + \|U_+^\gamma - U_+^0\| \le \eta$, $|d_t^2(x^\gamma - x^0)| + \|\nabla_{(t,x)}(U_+^\gamma - U_+^0)(t)\| \le \delta$, 且 $\delta + \eta = \epsilon < 1$. 存在 $T$ 与 $\eta$ 有关，与 $U_+$ 无关，使得 $0 \le t \le T$, 当 $\gamma \to \infty$ 时，在 $C^1(\aleph_T^+)$ 上， $U_+^\gamma \to U_+$; 在 $C^2[0,T]$ 上， $x^\gamma(t) \to x(t)$.

**证** 先证明 $U_+^\gamma \in C^1(\aleph_T^+), x^\gamma \in C^2(0,T]$, 再由 $U_+^\gamma$ 在 $C^0(\aleph_T^+)$ 上收敛到 $U_+$, $x^\gamma$ 在 $C^1[0,T]$ 上收敛到 $x(t)$, 从而得在 $C^1(\aleph_T^+)$ 上， $U_+^\gamma \to U_+$; 在 $C^2[0,T]$ 上 $x^\gamma(t) \to x(t)$, 问题 (3.3) 的解 $U_+ \in C^1(\aleph_T^+), x(t) \in C^2[0,T]$. 令

$$V_+ = U_+ - U_+^0, \quad y = x - x^0, \quad V_+^\gamma = U_+^\gamma - U_+^0, \quad y^\gamma(t) = x^\gamma(t) - x^0(t), \tag{3.60}$$

则问题 (3.3) 与迭代格式 (3.10) 分别可改写为

$$\begin{cases} \partial_t V_+ + \partial_t U_+^0 + (A(V_+ + U_+^0) - (y'(t) + d_t x^0)I)\partial_x(U_+^0 + V_+) = B(U_+^0 + V_+), \\ G(V_+, y'(t)) = 0, \qquad y = 0, \\ y(0) = 0, \\ V_+(0,y) = 0 \end{cases} \tag{3.61}$$

与

$$\begin{cases} \partial_t V_+^{\gamma+1} + (A(V_+ + U_+^0) - (y'(t) + d_t x^0)I)\partial_x V_+^{\gamma+1} = H(V_+^\gamma), \\ G'_{(V_+^\gamma, d_t y^\gamma)}(V_+^{\gamma+1}, d_t y^{\gamma+1}) = g^\gamma, \\ y^{\gamma+1}(0) = 0, \\ V_+^{\gamma+1}(0,y) = 0. \end{cases} \tag{3.62}$$

其中

$$H(V_+^\gamma) = B(U_+^0 + V_+^\gamma) - \partial_t U_+^0 - (A(V_+^\gamma + U_+^0) - (d_t y^\gamma(t) + d_t x^0)I) \cdot \partial_x U_+^0,$$
$$g^\gamma = -G(V_+^\gamma, d_t y^\gamma) + G'_{(V_+^\gamma, d_t y^\gamma)}(V_+^\gamma, d_t y^\gamma).$$

对问题 (3.62) 利用 (3.12) 式，得到

$$\begin{aligned} |d_t y^{\gamma+1}(t)| + \|V_+^{\gamma+1}(t)\| &\le C\mathrm{e}^{CMt}\left(\int_0^t \|H(V_+^\gamma)(s)\|\mathrm{d}s + \|g^\gamma\|_t\right) \\ &\le C\mathrm{e}^{CMt}\left(\int_0^t (C_1 + C_2(\|U_+^\gamma(s)\|)\|V_+^\gamma(s)\|)\mathrm{d}s + \|g^\gamma\|_t\right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

先设 $|d_t y^\gamma(t)| + \|V_+^\gamma(t)\| \le \eta < 1$, 下面我们要说明 $|d_t y^{\gamma+1}(t)| + \|V_+^{\gamma(t)+1}\| \le \eta$. 显然 $g^\gamma$ 满足 $\|g^\gamma\| \le C\eta^2$, 所以 (3.63) 式中， $|d_t y^{\gamma+1}(t)| + \|V_+^{\gamma+1}(t)\| \le C\mathrm{e}^{CMt}(C_1 t + C_2(\eta)\eta t + C\eta^2)$. 在 $T$ 很小时，可以看出 $|d_t y^{\gamma+1}(t)| + \|V_+^{\gamma+1}(t)\| \le \eta$. 利用 (3.13) 式，有

$$\begin{aligned} |d_t^2 y^{\gamma+1}| + \|\nabla_{(t,x)} V_+^{\gamma+1}(t)\| &\le C\exp(CMt\mathrm{e}^{CMt})(\|d_t g^\gamma\|_t + \|H(V_+^\gamma(0,x))\| + M\|g\|_t \\ &\quad + \int_0^t (\|\partial_t H(V_+^\gamma)(s)\| + M\|H(V^\gamma)(s)\|)\mathrm{d}s) \\ &\le C\exp(CMt\mathrm{e}^{CMt})(M\|g^\gamma\|_{1,t} + M\int_0^t \|H(V^\gamma)(s)\|_1 \mathrm{d}s). \end{aligned}$$

令 $|d_t^2 y^\gamma| + \|\nabla_{(t,x)} V_+^\gamma(t)\| \le \delta$, 使得 $\delta + \eta = \epsilon < 1$. 则上面的

$$|d_t^2 y^{\gamma+1}| + \|\nabla_{(t,x)} V_+^{\gamma+1}(t)\| \le C\exp(CMt\mathrm{e}^{CMt}(MC(\epsilon)\epsilon^2 + M(C_1 t + C_2(\epsilon)\epsilon t))).$$

$T$ 很小时，可以看出 $|d_t^2 y^{\gamma+1}| + \|\nabla_{(t,x)} V_+^{\gamma+1}(t)\| \le \delta$. 所以当 $K, T$ 很小时，有

$$\|U_+^\gamma\|_{1,\aleph_T^+} + \|d_t x(t)\|_{1,[0,T]} \le K. \tag{3.64}$$

现在有 $U_+^\gamma \in C^1(\aleph_T^+), x^\gamma(t) \in C^2(0,T]$, 由 (3.10) 式，知道 $(U_+^{\gamma+1} - U_+^\gamma, x^{\gamma+1}(t) - x^\gamma(t))$ 满足

$$\begin{cases} L(U_+^\gamma, x^\gamma(t))(U_+^{\gamma+1} - U_+^\gamma) = M^\gamma, \\ G'_{(U_+^\gamma, d_t x^\gamma(t))}(U_+^{\gamma+1} - U_+^\gamma, d_t x^{\gamma+1}(t) - d_t x^\gamma(t)) = \kappa^\gamma, \\ (U_+^{\gamma+1} - U_+^\gamma)(0,x) = 0, \\ (x^{\gamma+1}(0) - x^\gamma(0)) = 0. \end{cases} \tag{3.65}$$

其中

$$M^\gamma = L(U_+^{\gamma-1}, x^{\gamma-1}(t))U_+^\gamma - L(U_+^\gamma, x^\gamma(t))U_+^\gamma + B(U_+^\gamma) - B(U_+^{\gamma-1}),$$

$$\kappa^\gamma = G'_{(U_+^{\gamma-1}, d_t x^{\gamma-1})}(U_+^\gamma, d_t x^\gamma) - G'_{(U_+^{\gamma-1}, d_t x^{\gamma-1})}(U_+^{\gamma-1}, d_t x^{\gamma-1}) - G(U_+^\gamma, d_t x^\gamma) + G(U_+^{\gamma-1}, d_t x^{\gamma-1}).$$

令 $a^\gamma(t) = \|U_+^{\gamma+1} - U_+^\gamma\|_t + \|d_t(x^{\gamma+1}(t) - x^\gamma(t))\|_t < 1$, 则

$$\|M^\gamma(s)\| \le C a^{\gamma-1}(s). \tag{3.66}$$

将 $\kappa^\gamma$ 中的 $G(U_+^\gamma, d_t x^\gamma)$ 在 $G(U_+^{\gamma-1}, d_t x^{\gamma-1})$ 处泰勒展开，得

$$\|\kappa^\gamma\| \le C(a^{\gamma-1}(t))^2. \tag{3.67}$$

这里需要用到 $U_+^\gamma \in C^1(\aleph_T^+), x^\gamma(t) \in C^2[0,T]$. 然后对问题 (3.65) 使用估计 (3.12), 有

$$a^\gamma(t) \le C((a^{\gamma-1}(t))^2 + \int_0^t a^{\gamma-1}(s)\mathrm{d}s). \tag{3.68}$$

使 $T$ 足够小，就有 $U_+^\gamma$ 在 $C^0(\aleph_T^+)$ 上收敛到 $U_+$, $x^\gamma(t)$ 在 $C^1(0,T]$ 上收敛到 $x(t)$. $U_+ \in C^0(\aleph_T^+), x(t) \in C^1[0,T]$. 而由 (3.64) 式， $U_+^\gamma \in C^1(\aleph_T^+), x^\gamma(t) \in C^2(0,T]$, 从而当 $\gamma \to \infty$ 时，在 $C^1(\aleph_T^+)$ 上， $U_+^\gamma \to U_+$; 在 $C^2(0,T]$ 上， $x^\gamma(t) \to x(t)$. 说明问题 (3.3) 的解 $U_+ \in C^1(\aleph_T^+), x(t) \in C^2[0,T]$, 引理 3.7 得证.

由此定理 2.1 得证. ∎

## 参 考 文 献


[1] Anile A M, Blokhin A M, Trakhinin Yu L. Investigation of a mathematical model for radiation hydrodynamics. Z Angew Math Phys, 1999, **50**: 677–697

[2] Bressan A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws, the One-dimensional Cauchy Problem. Oxford: Oxford University Press, 2000

[3] Hartman P, Wintner A. Hyperbolic partial differential equations. Amer J Math, 1952, **74**: 834–864

[4] Ito K. BV-solutions of a Hyperbolic-elliptic System for a Radiation Gas. Preprint. Hokkaide: Hokkaide University, 1997

[5] Joly J L, Métivier G, Rauch J. Resonantly one dimensional nonlinear geometric optics. J Funct Anal, 1993, **114**: 106–231

[6] Kawashima S, Nikkuni Y, Nishibata S. The Initial Value Problem for Hyperbolic-elliptic Coupled Systems and Applications to Radiation Hydrodynamics. Analysis of Systems of Conservation Laws. Aachen: Chapman & Hall/CRC, 1997: 87–127; Monogr Surv Pure Appl Math, 99. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 1999

[7] Kawashima S, Nishibata S. Cauchy problem for a model system of the radiating gas: weak solutions with a jump and classical solutions. Math Models Meth Appl Sci, 1999, **9**: 69–91

[8] Kawashima S, Nishibata S. Shock waves for a model system of the radiating gas. SIAM J Math Anal, 1999, **30**: 95–117

[9] Kawashima S, Tanaka Y. Stability of rarefaction waves for a model system of a radiating gas. Kyushu J Math, 2004, **58**: 211–250

[10] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws, part II. Comm Pure Appl Math, 1957, **10**: 537–556

[11] Li L L, Yu W C. Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems. Duke University Mathematics Series. Durham, NC: Duke University, 1985

[12] Liu T P. Hyperbolic and Viscous Conservation Laws. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000

[13] Majda A. Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variable. New York: Springer-Verlag, 1984

[14] Mihalas D, Mihalas B W. Foundations of Radiation Hydrodynamics. New York: Oxford University Press, 1984

[15] Pomraning G C. The Equations of Radiation Hydrodynamics. London: Pergamon Press, 1973

[16] Rohde C, Yong W A. The nonrelativistic limit in radiation hydrodynamics: I weak entropy solutions for a model problem. J of Diff Eqs, 2007, **234**: 91–109

[17] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equation. New York: Springer-Verlag, 1983

[18] Wang Y G. Nonlinear geometric optics for shock waves, part II: system case. Z Anal Anw, 1997, **16**: 857–918

[19] Zhong X, Jiang S. Local existence and finite-time blow-up in multidimensional radiation hydrodynamics. J Math Fluid Mech, 2007, **9**: 543–564

## Existence of a Shock Wave in a One-dimensional Radiation Hydrodynamic System

Zhu Yifeng Jiang Peng

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240*)

**Abstract:** In this paper, the authors mainly study shock waves in a one-dimensional radiation hydrodynamic system. By using the Rankine-Hugoniot condition and entropy condition, this problem can be formulated as an initial boundary value problem with a free boundary for radiation hydrodynamic system. First, the authors transform this free boundary to the fixed one by using change of variables involving unknowns. Then they investigate the existence and uniqueness of the solution to the initial boundary value problem for this nonlinear system. For this problem, the authors first construct an approximate solution by using the compatibility conditions of the data. Then they use the Picard iteration and the Newton iteration for this nonlinear system respectively to construct a sequence of approximate solutions. By using a series of estimates and a compactness argument, the convergence of the sequence of approximate solutions is obtained. The limit of this sequence gives a shock wave of the original radiation hydrodynamic system.

**Key words:** One-dimensional radiation hydrodynamic systems; Shock waves; Existence.

**MR(2000) Subject Classification:** 78A40; 35L67; 74G20